MA2 – „písemná" přednáška 8. 4. 2020

Nejdříve slíbené shrnutí „povídání" z minulé přednášky o implicitně definované funkci jedné proměnné.

Formulovali jsme problém:

Je dána jedna (obecně nelineární) rovnice pro dvě neznámé $F(x,y)=0$, a známe jedno řešení $(x_0,y_0)\in R^2$ této rovnice, tedy platí $F(x_0,y_0)=0$. A co je ten problém? Zjistit, kdy bude mít tato rovnice, při volbě x „blízko" x_0, „blízko" y_0 jediné řešení y (z jedné rovnice $F(x,y)=0$ asi nemůžeme určit obě neznámé, proto jednu – zde x – volíme). Pokud ke „zvolenému" x bude takto nalézt „jediné" y, je tím vlastně „zadána" funkce – a ta je neznámá funkce implicitně definovaná.

Zopakujme definici:

Nechť (1) $F(x,y)$ je definovaná na množině $G\subset R^2$, G – otevřená,
(2) existuje bod $(x_0,y_0)\in G$ tak, že $F(x_0,y_0)=0$

Pak říkáme, že rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y=y(x)$, jestliže existují $\varepsilon>0,\delta>0$ tak, že pro každé $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ je $y=y(x)$ jediné řešení rovnice $F(x,y)=0$ takové, že $y(x)\in(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$

Tedy platí: 1) $y(x_0)=y_0$
2) $F(x,y(x))=0$ pro $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

(dle minulé přednášky značíme funkci též „písmenem" y, tj. $y=y(x)$ – v souladu s aplikacemi)

A odpověď na danou otázku je (bylo uvedeno bez důkazu)

<u>Věta (o implicitní funkci)</u>

Nechť (1) $F(x,y) \in C^{(k)}(G)$, $G \subset R^2$ je otevřená množina, $k \in N$

(2) $F(x_0,y_0) = 0$, $(x_0,y_0) \in G$

(3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

Potom rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y = y(x)$, $y(x) \in C^{(k)}(\mathcal{U}(x_0))$ a

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}, \quad x \in \mathcal{U}(x_0).$$

<u>Tedy o fci $y(x)$ „víme" toto</u>: 1) $y(x_0) = y_0$

2) $F(x,y(x)) = 0$ v $\mathcal{U}(x_0)$

3) $y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$

<u>Poznámka</u>: vzorec pro $y'(x)$ jsme si „dokázali" (užitím řetězového pravidla) v minulé přednášce; ale „doopravdy" číselně určit umíme $y'(x_0)$ (neboť známe-li $F(x,y)$ a $y(x_0)=y_0$, známe i $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)$ i $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$, tedy i $y'(x_0)$ (v 3) – – pro $x \neq x_0$, $x \in \mathcal{U}(x_0)$ známe „formuli" pro $y'(x)$, ale neznáme ani $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))$, ani $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))$ – – neboť „neznáme" $y(x)$.

Minule jsme si vyřešili příklad „technický" – řešení rovnice $x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0$ v okolí bodu $(x_0, y_0) = (1, 2)$, ale i jeden příklad „teoretický" – je-li dána v rovině křivka o rovnici $F(x,y) = 0$ (kde F splňuje předpoklady věty o implicitní funkci (aspoň pro $k = 1$), $F(x_0, y_0) = 0$ a $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0,0)$), pak rovnice tečny k této křivce v bodě (x_0, y_0) je (docela užitečné!)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

(též lze psát $dF(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) = 0$)

Připomeňme, že jsme si „křivku" nedefinovali (zatím) „přesně", ale bylo vysvětleno, že množinu $\{(x,y);\, F(x,y) = 0\}$ lze si představit jako „vrstevnici" grafu funkce $F(x,y) = z$ ve „výšce" $z = 0$ – za předpokladu $F \in C^{(k)}(G)$ lze věřit tomu, že tato množina je křivka, jak si ji (asi) představujeme.

<u>Příklad 1.</u> Je dána elipsa o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$, $b > 0$. Pak rovnici lze zapsat: $F(x,y) = 0$, kde $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, a nechť (x_0, y_0) je bodem elipsy, tedy $F(x_0, y_0) = 0$;

$F(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\nabla F(x_0, y_0) = 2\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right) \neq (0,0)$,

neboť počátek $(0,0)$ na elipse neleží!

Jsou tedy splněny v našem příkladu předpoklady věty (o implicitní funkci) a rovnice tečny ke elipse v bodě (x_0,y_0) této elipsy je

$$2\,\frac{x_0}{a^2}(x-x_0) + 2\,\frac{y_0}{b^2}(y-y_0) = 0$$

a po úpravě („krátíme" 2 a využijeme, že $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$)

dostaneme rovnici ve tvaru :

$$\underline{\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$ – „snadné"!!

A ještě si uvedeme jeden příklad k větě o implicitní funkci jedné proměnné – na úvod k funkcím, definovaným implicitně, byla zmíněna rovnice, která vyjde „při řešení diferenciální rovnice 1. řádu se separovatelnými proměnnými (rovnice „pro" řešení $y(x)$ se nazývá první integrál této diferenciální rovnice) – – a zde je příklad („opačná" cesta) – máme rovnici pro řešení, a dostaneme diferenciální rovnici, jejíž řešení je rovnice daná.

<u>Příklad 2.</u> Je dána rovnice

$$(1)\quad \underline{\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad ; \quad (x_0,y_0) = (1,0)}$$

<u>Označme</u> : $F(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$;

pak : 1) $F \in C^\infty(\mathcal{U}(1,0))$

2) $F(1,0) = 0$

3) $$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y - \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}\Bigg|_{(1,0)} = -1$$

Tedy vidíme, že jsou splněny předpoklady věty o implicitní funkci, tedy rovnicí (1) je v okolí bodu (1,0) definována implicitní funkce $y = y(x)$, tj. $y(1)=0$ a platí

$$(2) \qquad \frac{1}{2} \ln \left(x^2 + y^2(x) \right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y(x)}{x} \right) = 0 \quad \text{v } \mathcal{U}(1)$$

A použijeme-li „vzorec" pro výpočet $y'(x)$, dostaneme:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x - \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y - \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y-x}{x^2+y^2}$$

tedy: (dle „vzorce")

$$y'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = - \frac{x + y(x)}{y(x) - x} \quad \text{v okolí bodu } x=1,$$

tedy, $y(x)$ je řešením diferenciální rovnice

$$y'(x) = - \frac{x + y(x)}{y(x) - x} \quad \text{s počáteční podmínkou } y(1)=0$$

Rovnici pro $y'(x)$ bychom dostali též derivací vztahu (2) dle x, – můžete si zkusit.

A nyní ještě dvě „zobecnění" (a stručněji)

1) Implicitně definovaná funkce více proměnných

Definice: Řekneme, že rovnicí $F(x_1,x_2,..,x_n,y)=0$ je v okolí bodu $(x_1^0,x_2^0,..,x_n^0,y_0)$ definována implicitně funkce $y=f(x_1,x_2,..,x_n)$, jestliže

1) $F(x_1^0,x_2^0,..,x_n^0,y_0)=0$

2) existují $\varepsilon>0$ a $\delta>0$ taková, že pro každé $X=(x_1,x_2,..,x_n)\in U(X_0,\delta)$ je $y=f(X)$ jediné řešení rovnice $F(x_1,x_2,..,x_n,y)=0$ takové, že $f(x_1,x_2,..,x_n)\in U(y_0,\varepsilon)$ (zde $X_0=(x_1^0,x_2^0,..,x_n^0)$)

Pak (opět jako u rovnice $F(x,y)=0,(x,y)\in R^2$) platí:

1) $F(x_1,x_2,..,x_n,f(x_1,x_2,..,x_n))=0$ v $U(x_1^0,x_2^0,..,x_n^0)$

2) $f(x_1^0,x_2^0,..,x_n^0)=y_0$

Poznámka: Pro jednodušší zápis budeme (opět) značit $(x_1,x_2,..,x_n)=X$, $(x_1^0,x_2^0,..,x_n^0)=X_0$, $f(x_1,x_2,..,x_n)=f(X)$; a v aplikacích se opět značí funkce, definovaná implicitně rovnicí $F(x_1,x_2,..,x_n,y)=0$ spíše $y=y(x_1,x_2,..,x_n)$ – budeme takto implicitně definovanou fci značit též.

Věta (o implicitní funkci více proměnných)

Nechť 1) $F(X,y) \in C^{(k)}(G)$, $G \subset R^{n+1}$, G-otevřená množina;

2) $F(X_0,y_0) = 0$, $(X_0,y_0) \in G$;

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(X_0,y_0) \neq 0$;

Pak rovnicí $F(X,y)=0$ je v okolí bodu (X_0,y_0) definovaná implicitně funkce $y = y(X) \in C^{(k)}(U(X_0,\delta))$ pro „jisté" $\delta > 0$. Parciální derivace funkce $y = y(X)$ jsou v tomto okolí $U(X_0,\delta)$ dány „vzorcem" pro $i = 1,2,..n$

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}(X) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(X, y(X))}{\frac{\partial F}{\partial y}(X, y(X))} .$$

A „rozepsáno" pro $X = (x_1,..,x_n)$:

$$(*) \qquad \frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1,..,x_n) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1.,x_n, y(x_1.,x_n))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,..x_n, y(x_1,.,x_n))}$$

K odvození vzorce (*): Za předpokladu věty platí:

$$(**) \qquad F(x_1,..,x_n, y(x_1.,x_n)) = 0 \quad v \quad U(X_0,\delta)$$

Funkce $F(x_1.,x_n, y(x_1,.,x_n))$ má dle předpokladů věty všechny parciální derivace a k jejich odvození lze užít pravidlo pro derivování složené funkce:

Jestliže platí (**), tj.

$$F(x_1,\dots x_n, y(x_1,\dots,x_n)) = 0 \quad v \ \mathcal{U}(X_0,\delta),$$

je i $\quad \frac{\partial}{\partial x_i} F(x_1,\dots x_n, y(x_1,\dots,x_n)) = 0 \quad v \ \mathcal{U}(X_0,\delta)$

a užitím řetězového pravidla dostáváme $\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = 0 \text{ pro } i \neq j \right)$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n, y(x_1,\dots,x_n)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_1,\dots,x_n, y(x_1,\dots,x_n)) \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = 0,$$

a tedy $\quad \frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = - \dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\dots x_n, y(x_1,\dots,x_n))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,\dots,x_n, y(x_1,\dots x_n))},$

neboť ze spojitosti parciálních derivací funkce F i y a nenulovosti $\frac{\partial F}{\partial y}(X,y)$ v bodě (X_0,y_0) dostaneme, že $\frac{\partial F}{\partial y}(X,y) \neq 0$ v $\mathcal{U}(X_0,\delta)$, $\delta>0$ (a to právě je ve „věte")

Toto byl vlastně <u>příklad</u> 1. na implicitně definované funkce více proměnných – takto to „berte".

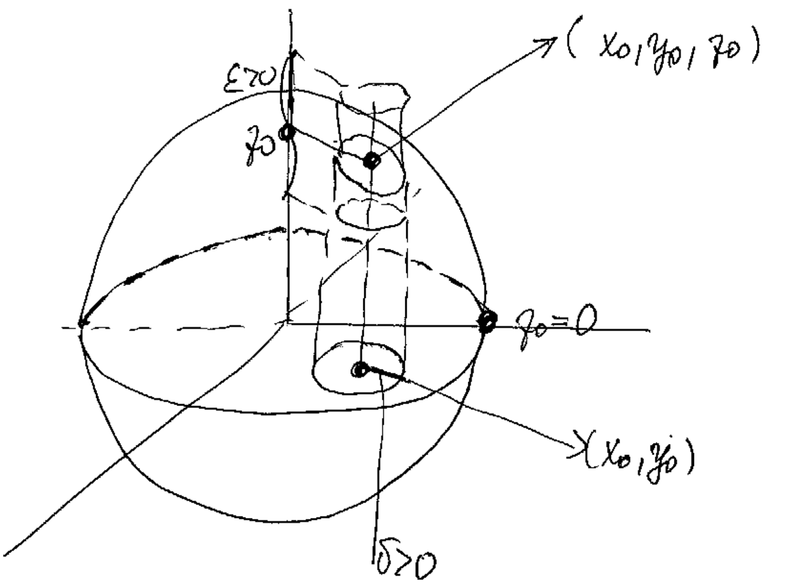
A teď „trochu" vysvětlení – jak máme rozumět „tvrzení" uvedené výše o „implicitní funkci více proměnných, a hlavně předpokladu 3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1^0,\dots,x_n^0,y_0) \neq 0$:

„Utečme" do R^3, tj. zkusme si představit „nějaký jednoduchý příklad rovnice $F(x,y,z) = 0$
(v R^3 budeme bod ~~značit~~ značit zpravidla (x,y,z))

Nechť je dána rovnice $x^2+y^2+z^2=R^2$, $R>0$

Množina bodů v R^3 $\mathcal{S}=\{X=(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2=R^2,\ R>0\}$ je povrch koule o středu v počátku O a poloměru $R>0$ – – říká se „kulová plocha" nebo „sféra" – neboť je $\mathcal{S}$ množina bodů, které mají od počátku O vzdálenost $d_3(O,X)=R$ $\left(=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$

Vezměme si bod $X_0=[x_0,y_0,z_0]\in\mathcal{S}$, $z_0>0$ (pro $z_0<0$ analogicky)



v okolí bodu (x_0,y_0,z_0), $z_0>0$ lze sféru $\mathcal{S}$ vyjádřit jako graf funkce

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, tj. $z=f(x,y)$,

ale pokud je $z_0=0$ (tj. bod (x_0,y_0,z_0) je na „rovníku"), pak v žádném okolí bodu $(x_0,y_0,0)$ nelze sféru $\mathcal{S}$ vyjádřit pomocí grafu nějaké funkce $z=f(x,y)$ – analogické příkladu s kružnicí u implicitně def. fce dvou proměnných.

A všimněme si, že zde je $\left(\frac{\partial F}{\partial z}=2z\right)$ $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,0)=0$! Tedy, tečná rovina je rovnoběžná s osou z, a to je právě to, co „nám škodí". Jakmile je ale $z_0\neq 0$, pak už vždy „kousek sféry" je možno popsat grafem funkce – tečná rovina ke sféře v tomto bodě už je „dobrá".

Příklad 2 – opět „teoretický"

Odvození rovnice tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$ (*) v bodě (x_0,y_0,z_0) této plochy, tj. $F(x_0,y_0,z_0)=0$ – za předpokladů věty o implicitní funkci, tj. $F\in C^{(1)}(G)$, G-otevřená, $G\subset R^3$ a $(x_0,y_0,z_0)\in G$ a $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$:

Pak věta (o implicitní funkci) říká, že existuje funkce $z=z(x,y)\in C^1(\mathcal{U}(x_0,y_0))$ a $z_0=z(x_0,y_0)$, která splňuje rovnici $F(x,y,z(x,y))=0$, tj. plocha, daná rovnicí (*) je v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) grafem funkce $z=z(x,y)$, diferencovatelné v bodě (x_0,y_0), tj. existuje ke grafu fce z (tj. i k dané ploše) v bodě (x_0,y_0,z_0) tečná rovina, jejíž rovnice je

$$z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

a vzorce pro $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)$ nám „dají" rovnici

$$z = z_0 - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0) - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0),$$

což vynásobením rovnice $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)$ dostaneme rovnici tečné roviny: $\underline{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0}$,

tj. $\underline{\nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0}$,

neboli

$$\nabla F(X_0)(X-X_0)=0$$

<u>a ještě poznámka 1.</u>

Stejně jako u odvození rovnice tečny ke křivce, dané rovnicí $F(x,y)=0$ v bodě (x_0,y_0) této křivky stačilo, aby $\nabla F(x_0,y_0) \neq (0,0)$ (v případě, že $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$, ale $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$ lze „modifikací" věty o implicitní funkci křivku v okolí bodu (x_0,y_0) uvažovat jako graf fce $x = x(y)$, $x(y_0)=x_0$), stačí i tady u plochy, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$ pro tečnou rovinu v bodě (x_0,y_0,z_0) této plochy, aby $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$ (je-li např. $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$, opět, v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) je plochu možné uvažovat jako graf funkce $x = x(y,z)$, $x(y_0,z_0)=x_0$ a podobně i v situaci, kdy $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$)

<u>Příklad 3</u> – aplikace příkladu 2

Mějme kulovou plochu o rovnici $x^2+y^2+z^2-R^2=0$, $R>0$, a bod této plochy (x_0,y_0,z_0), tj. $x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2=0$.

Pak $\nabla F(x_0,y_0,z_0) = 2(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$

nebol' počátek na dané ploše „neleží".

Tedy, tečná rovina ke kulové ploše v bodě (x_0,y_0,z_0) má rovnici $\underline{x_0 x + y_0 y + z\cdot z_0 = R^2}$

nebol'! $\quad x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$

lze upravit $\quad x_0 x + y_0 y + z_0 z = \underbrace{x_0^2+y_0^2+z_0^2}_{=R^2}$

<u>a pozorování</u> – $\nabla F(x_0,y_0,z_0) = 2(x_0,y_0,z_0)$ je tedy kolmý k tečné rovině v bodě kulové plochy!

<u>a toto platí obecně</u>: Je-li plocha dána rovnicí $F(x,y,z)=0$, $F(x_0,y_0,z_0)=0$ a F splňuje předpoklady věty o implicitní funkci, tj. $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$, je $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ kolmý k příslušné tečné rovině k ploše v bodě (x_0,y_0,z_0) plochy – a nazývá se <u>normálový vektor plochy v bodě (x_0,y_0,z_0)</u>

(užitečné např. při plošném integrálu – ve fyzice často užívaném)

<u>Příklad 4</u> – <u>„technický"</u>

Je dána rovnice $z^3 - 3xyz - 1 = 0$ $(*)$

a $(x_0,y_0,z_0) = (0,2,1)$

Je danou rovnicí v okolí bodu $(0,2,1)$ definována implicitně funkce $z = z(x,y)$? – tak zní úvodní příklad.

Odpověď: označme $F(x,y,z) = z^3 - 3xyz - 1$;

pak

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & F \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \\ 2) & F(0,2,1) = 1 - 0 - 1 = 0 \\ 3) & \dfrac{\partial F}{\partial z}(0,2,1) = 3z^2 - 3xy \Big|_{(0,2,1)} = 3 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ v okolí bodu $(0,2,1)$ rovnicí $(*)$ je implicitně definována funkce $z = z(x,y)$, $z(0,2) = 1$ a funkce $z(x,y)$ splňuje rovnici (v okolí bodu $(0,2)$)

$$(**) \qquad z^3(x,y) - 3xy\,z(x,y) - 1 = 0$$

Nechť je naším úkolem aproximovat lineárně „řešení" této rovnice, tj. funkci $z = z(x,y)$ v okolí „bodu" $(0,2)$, tj:

$$z(x,y) \cong z(0,2) + \frac{\partial z}{\partial x}(0,2)\cdot x + \frac{\partial z}{\partial y}(0,2)(y-2)$$

Víme, že $z(0,2) = 1$, ještě je třeba spočítat parciální derivace. Věta dává vzorec pro výpočet derivací $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí bodu $(0,2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} = - \frac{-3y\,z(x,y)}{3z^2(x,y) - 3xy} = + \frac{y\,z(x,y)}{z^2(x,y) - xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} = - \frac{-3x\,z(x,y)}{3z^2(x,y) - 3xy} = \frac{x\,z(x,y)}{z^2(x,y) - xy}$$

a tedy pro $(x_0,y_0) = (0,2)$ dostaneme!

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,2) = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,2) = 0$$

a pak $z(x,y) \cong 1 + 2x$ v okolí bodu $(0,2)$

Ukážeme si ještě jinou cestu při výpočtu derivací implicitně definované funkce, a to derivováním rovnice $**$, kterou funkce $z(x,y)$ splňuje – zvláště při výpočtu derivací vyšších řádů je to cesta „lepší".

Funkce $z(x,y)$ splňuje rovnici (v okolí bodu $(0,2)$):

(**) $\quad z^3(x,y) - 3xy\,z(x,y) - 1 = 0$

Derivujme (**) „podle x": (píšu zde $\frac{\partial z}{\partial x}$ „místo" $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$)

$$3z^2(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - 3y\,z(x,y) - 3xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

tj. (***) $\frac{\partial z}{\partial x}\left(z^2(x,y) - xy\right) - y\cdot z(x,y) = 0$, tj. (dále)

(****) $$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{y\,z(x,y)}{z^2(x,y) - xy}$$

a derivace (**) „podle y":

$$3z^2(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - 3x\,z(x,y) - 3xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

tj. $\frac{\partial z}{\partial y}\left(z^2(x,y) - xy\right) - x\,z(x,y) = 0$, a tedy (opět)

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{x\,z(x,y)}{z^2(x,y) - xy}$$

a zkusme určit $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,2)$: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}(0,2) = 2,\ \frac{\partial z}{\partial y}(0,2) = 0\right)$

derivujme (***) podle y (je to jednodušší, než derivace zlomku, z vyjádření $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ (****)): dostaneme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\left(z^2(x,y) - xy\right) + \frac{\partial z}{\partial x}\left(2\cdot z(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - x\right) - z(x,y) - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

a pro $(x_0,y_0) = (0,2)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,2)\cdot 1 + 2\cdot(0-0) - 1 - 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,2) = 1}$$

(a podobně lze určit $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,2)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,2)$)

A ještě poznámka k „výpočtu" parciálních derivací funkce $y = y(x_1, \dots x_n)$, definované implicitně rovnicí $F(x_1, \dots x_n, y) = 0$ v okolí bodu $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_0)$ (předpokládejme, že platí předpoklady věty o implicitní funkci):

Rovnice $\qquad F(x_1, \dots x_n, y) = 0$

je obecně nelineární v y, ale při „výpočtu" parciálních derivací funkce $y(x_1, \dots, x_n)$ dostaneme pro hledané parciální derivace $\frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ rovnice lineární, a vždy je u $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ nenulový koeficient, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n)) \neq 0$ v okolí bodu $(x_1^0, \dots, x_n^0)$. A totéž platí i pro „výpočet" parciálních derivací vyšších řádů (dle věty má funkce implicitně definovaná touto rovnicí derivace stejného řádu, jako „rovnice", a u derivace, kterou chceme určit derivováním dané rovnice, bude koeficient $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots x_n))$).

A druhé (a poslední) zobecnění na systémy funkcí, definovaných implicitně soustavou obecně nelineárních rovnic

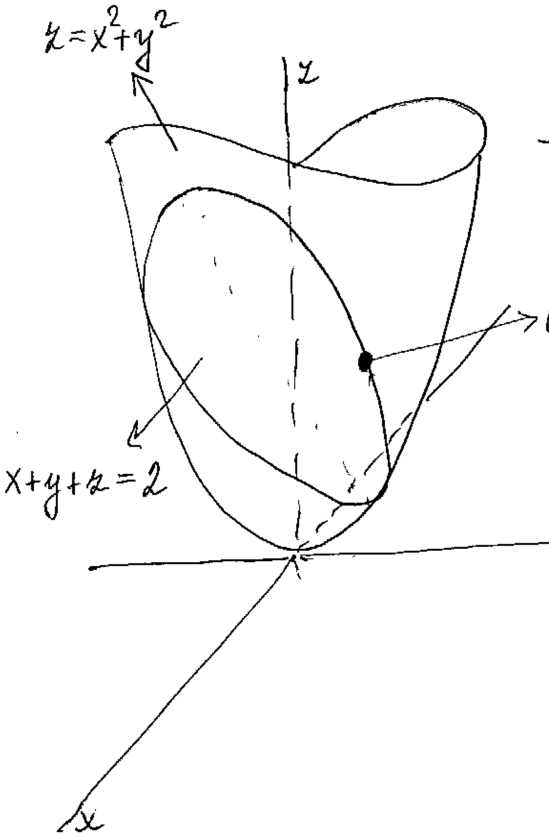
(nebude u zkoušky, ale je dobré se aspoň trochu s tímto problémem seznámit – může se „hodit" v aplikacích matematiky)

Začněme příkladem, pak budeme problém a jeho řešení formulovat obecně (s vysvětlením, ale bez důkazů, jako dříve)

Příklad: Je dána soustava dvou rovnic

(1) $\left(F_1(x,y,z) \equiv \right) \quad x+y+z-2=0$ – rovina

(2) $\left(F_2(x,y,z) \equiv \right) \quad x^2+y^2-z=0$ – rotační paraboloid



a bod $(x_0,y_0,z_0)=(-1,1,2)$ je řešením (1),(2) – – jak „vypadá" řešení soustavy v okolí bodu $(-1,1,2)$? Uvažujeme-li „geometricky", jedná se o průnik „rotačního paraboloidu a roviny – asi to bude" křivka, na které leží bod $(-1,1,2)$ – – a půjde asi o to tuto křivku popsat „parametricky", tj. zda „půjde" při volbě „třeba „x" jako parametru popsat křivku jako množinu bodů $(x, y(x), z(x))$, $x \in U(x_0)$ (zde $x_0=-1$);

tedy se objevuje otázka, tedy bude mít soustava rovnic (1),(2) (tj. soustava dvou rovnic pro tři neznámé) při volbě jedné neznámé (jako parametru) x jediné řešení $y(x), z(x)$ při zvoleném „$x \in U(x_0)$? Zkusme to:

(U „soustavy rovnic lineárních" radí „LA – rovnice by měly být „lineárně nezávislé")

Předpokládejme, že soustavou (1), (2) jsou (asi tedy nějak implicitně) definovány funkce $y = y(x)$, $z = z(x)$ v okolí bodu $x_0 = -1$ tak, že platí v $\mathcal{U}(x_0)$

$$(1) \qquad x + y(x) + z(x) - 2 = 0$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2(x) - z(x) = 0$$

a funkce $y(x)$, $z(x)$ mají derivaci; pak derivováním (1), (2) dostaneme následující soustavu pro $y'(x)$ a $z'(x)$:

$$\left.\begin{array}{ll} (1)' & 1 + y'(x) + z'(x) = 0 \\ (2)' & 2x + 2y(x)y'(x) - z'(x) = 0 \end{array}\right. \qquad (\text{v } \mathcal{U}(x_0))$$

Soustava $(1)'$, $(2)'$ má pro zvolené $x \in \mathcal{U}(x_0)$ právě jedno řešení, neboť determinant soustavy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y(x) & -1 \end{vmatrix} \left(= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} (x, y(x), z(x)) \right) \neq 0$$

pro $x = x_0 \ (= -1)$; zde $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$.

Tedy, determinant

$$(*) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

a to asi budeme potřebovat v obecné formulaci věty o systému funkcí implicitně definovaných soustavou dvou rovnic – – analogie $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ pro „řešení" rovnice $F(x, y) = 0$ (kde $F(x_0, y_0) = 0$) v okolí bodu (x_0, y_0) ve „tvaru" $y = y(x)$

Determinant $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}, & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}, & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} (x_0, y_0, z_0)$ se nazývá Jacobián

(determinant Jacobiho matice zobrazení (F_1, F_2) vzhledem k proměnným y, z) a budeme tento determinant značit $\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}(x_0, y_0, z_0)$.

A zkusme formulovat definici a větu o „implicitních" funkcích pro tento případ:

Mějme soustavu rovnic (*) $\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ a bod (x_0, y_0, z_0)

takový, že platí $F_i(x_0, y_0, z_0) = 0$, $i = 1, 2$.

Definice: Soustavou (*) jsou v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) definovány implicitně funkce $y = y(x)$, $z = z(x)$, když existují $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in U(x_0, \delta)$ je $(y(x), z(x))$ jediné řešení soustavy (*) takové, že $(y(x), z(x)) \in U((y_0, z_0), \varepsilon)$.

Věta Nechť
1) $F_1, F_2 \in C^{(k)}(G)$, $G \subset R^3$
2) $F_i(x_0, y_0, z_0) = 0$, $i = 1, 2$, $(x_0, y_0, z_0) \in G$
3) $\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Pak je soustavou (*) v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) definována dvojice funkcí $y(x), z(x)$, $y(x) \in C^{(k)}(U(x_0))$ i $z(x) \in C^{(k)}(U(x_0))$, tedy taková, že $F_i(x, y(x), z(x)) = 0$ v $U(x_0)$, $i = 1, 2$
a $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$.

<u>K domnečemu příkladu</u> –

ověření vět o implicitních funkcích:

(1) $F_1, F_2 \in C^\infty(R^3)$

(2) $F_i(-1,1,2) = 0$, $i=1,2$

(3) $\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}(-1,1,2) = -3$ (viz jsme spočítali);

Tedy, soustavou $F_i(x,y,z)=0$, $i=1,2$ jsou v okolí bodu $(x_0,y_0,z_0) = (-1,1,2)$ definovány implicitní funkce $y=y(x)$, $z=z(x)$, $y(-1)=1$, $z(-1)=2$; $y(x), z(x) \in C^\infty(U(-1))$ a zase umíme určit $y'(-1)$ a $z'(-1)$ (ze soustavy rovnic)

$$\begin{aligned} y'(x) + z'(x) &= -1 \\ 2y(x)y'(x) - z'(x) &= -2x \end{aligned}$$

a řešení $y'(x) = \frac{-2x-1}{2y+1}$, $z'(x) = -y'(x) - 1 = \frac{2(x-y)}{2y+1}$

($\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}(x,y,z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & -1 \end{vmatrix} = -1-2y \neq 0$ ze spojitosti $\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}$ v okolí bodu $(-1,1,2)$, poněvadž $\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}(-1,1,2) = -3$)

tedy, $y'(-1) = \frac{1}{3}$, $z'(-1) = -\frac{4}{3}$, a vektor $(1, y'(-1), z'(-1))$ je tečný vektor ke křivce, dané parametricky ve tvaru $(x, y(x), z(x))$ v bodě (x_0,y_0,z_0), tj. lze vyjádřit tečnu ke křivce v bodě $(x_0,y_0,z_0) = (-1,1,2)$:

$$\begin{aligned} x &= -1 + 3t \\ y &= 1 + t \\ z &= 2 - 4t \end{aligned} \quad , t \in R$$

(směrový vektor jsme vzali $3\left(1, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$)

A takto se formulují definitivní zobecnění problému:

Mějme soustavu rovnic ($m, n \in N$)

$$(*)\begin{cases} F_1(x_1, \dots x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ F_2(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_m) = 0 \\ \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_m) = 0 \end{cases}$$

stručně $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_m)$

$$F_1(X, Y) = 0 \qquad X \in R^n, Y \in R^m$$
$$F_2(X, Y) = 0$$
$$\dots$$
$$F_m(X, Y) = 0$$

1) Nechť $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ jsou definovány v otevřené množině $G \subset R^{n+m}$, $i = 1, 2, \dots m$

2) $F_i(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0) = 0$, $i = 1, 2, \dots m$, $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots y_m^0) \in G$

<u>Definice:</u> Soustavou (*) jsou v okolí bodu $(X_0, Y_0) \in G$ ($X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, $Y_0 = (y_1^0, \dots, y_m^0)$) definovány implicitně funkce $y_i(X)$, $i = 1, 2, \dots, m$, pokud existují $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tak, že pro každé $X \in \mathcal{U}(X_0, \delta)$ je vektorová funkce $Y(X) = (y_1(X), \dots, y_m(X))$ jediné řešení soustavy (*) takové, že $Y(X) \in \mathcal{U}(Y_0, \varepsilon)$.

<u>Věta:</u> (o systému „implicitních" funkcí): Nechť

1) $F_1, \dots, F_m \in C^{(1)}(G)$, $G \subset R^{n+m}$ otevřená,
2) $F_i(X_0, Y_0) = 0$, $i = 1, 2, \dots m$, $(X_0, Y_0) \in G$
3) $\dfrac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots y_m)}(X_0, Y_0) \neq 0$.

Pak je soustavou (*) v okolí bodu $(X_0, Y_0) \in G$ definován implicitně systém funkcí $y_1(X), \dots y_m(X)$ tak, že

$$F_i(X, Y(X)) = 0 \text{ v } \mathcal{U}(X_0),\ i = 1, \dots m \quad \text{a} \quad Y(X_0) = Y_0$$

<u>A ještě dva příklady:</u>

1. <u>Transformace souřadnic – kartézské „do" polárních:</u>

$$(*)\begin{cases} x - r\cos\varphi = 0 \\ y - r\sin\varphi = 0 \end{cases}, \text{ tj. } \begin{matrix} F_1(x,y,r,\varphi) = 0 \\ F_2(x,y,r,\varphi) = 0 \end{matrix}$$

v okolí bodu $(x_0, y_0, r_0, \varphi_0)$ $(r_0 > 0)$, kde $F_i(x_0, y_0, r_0, \varphi_0) = 0$

Ověříme předpoklady věty o „systému" implicitních funkcí:

1) $F_i(x,y,r,\varphi) \in C^\infty(\mathcal{U}(x_0,y_0,r_0,\varphi_0))$, $r_0 > 0$, $i = 1,2$;

2) $F_i(x_0,y_0,r_0,\varphi_0) = 0$, $r_0 > 0$, $i = 1,2$ (předpokládáme v úloze)

3) $\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(r,\varphi)}(x_0,y_0,r_0,\varphi_0) = \begin{vmatrix} -\cos\varphi_0, & r_0\sin\varphi_0 \\ -\sin\varphi_0, & -r_0\cos\varphi_0 \end{vmatrix} = r_0 \neq 0$,

tedy, dle věty (o „systému" implicitních funkcí) je soustavou (*) definována dvojice funkcí $r = r(x,y)$, $\varphi = \varphi(x,y)$ (implicitně) v okolí bodu $(x_0, y_0, r_0, \varphi_0)$, $r_0 > 0$ (tj. $(x_0,y_0) \neq (0,0)$), tedy, v okolí každého bodu $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ má soustava (*), zvolíme-li (x,y) z tohoto okolí, jediné řešení $r = r(x,y)$ a $\varphi = \varphi(x,y)$, tj. v okolí každého bodu $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ existuje k zobrazení $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ inverzní zobrazení, mající také spojité parciální derivace.

2. a příklad „technický":

Je dána soustava rovnic

$$\left.\begin{array}{l} (F_1(x,y,u,v) \equiv)\quad x+y-2u^2+v^2=0 \\ (F_2(x,y,u,v) \equiv)\quad x-y-uv=0 \end{array}\right\} (*)$$

a bod $(x_0,y_0,u_0,v_0) = (1,0,1,1)$

Ukažme, že soustavou rovnic (*) je v okolí bodu (x_0,y_0,u_0,v_0) definována implicitně dvojice funkcí $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$.

Ověřme předpoklady věty „o systému" implicitních funkcí:

Platí: 1) $F_i \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$, $i=1,2$;

2) $F_i(1,0,1,1)=0$, $i=1,2$;

3) $$\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}(1,0,1,1) = \begin{vmatrix} -4u, & 2v \\ -v, & -u \end{vmatrix}_{(1,0,1,1)} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 6\,(\neq 0),$$

tj. soustavou (*) jsou v okolí bodu $(x_0,y_0,u_0,v_0)=(1,0,1,1)$ definovány implicitně funkce $u=u(x,y)\in C^\infty(\mathcal{U}(1,0))$, $v=v(x,y)\in C^\infty(\mathcal{U}(1,0))$, tj. $u(1,0)=1$, $v(1,0)=1$, a platí v $\mathcal{U}(1,0)$:

$$x+y-2u^2(x,y)+v^2(x,y)=0$$
$$x-y-u(x,y)\cdot v(x,y)=0$$

Poznámka: Vidíme, že pro soustavu (*), zadanou v příkladu, je

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}(x_0,y_0,u_0,v_0) = \begin{vmatrix} -4u_0, & 2v_0 \\ -v_0, & -u_0 \end{vmatrix} = 4u_0^2+2v_0^2 \neq 0$$

pro každý bod (x_0,y_0,u_0,v_0), kde $u_0\neq 0$ a $v_0\neq 0$;

tedy, soustavou rovnic (*) je v okolí každého bodu $(x_0, y_0, u_0, v_0) \in R^4$, kde $u_0 \neq 0$ i $v_0 \neq 0$, definována implicitně dvojice funkcí $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, $u, v \in C^\infty(\mathcal{U}(x_0,y_0))$.

Tento „výsledek" našeho příkladu lze „chápat" také tak, že k zobrazení $G: R^2 \to R^2$, $G(u,v) = (x,y)$, kde

$$x = \frac{1}{2}\left(2u^2 - v^2 + uv\right)$$
$$y = \frac{1}{2}\left(2u^2 - v^2 - uv\right)$$

v okolí každého bodu $(u_0, v_0) \neq (0,0)$ existuje zobrazení inverzní, též se spojitými derivacemi (všech řádů).